Formas Bilineales y Cuadráticas (Resumen)

Índice

En todo este resumen **se asume** que $\mathscr{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(i), \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. La teoría se puede extender de forma similar al caso de espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_p$, con p primo, prestando especial atención al caso $\mathbb{Z}_2$. No obstante, en esta asignatura nos limitamos a los casos arriba mencionados.

1. Formas bilineales

Definición. Sea $\mathscr{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se dice que una aplicación

$$F : \mathscr{V} \times \mathscr{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

es una forma bilineal sobre $\mathscr{V}$ si se verifica que

1. $\forall\ u, v, w \in \mathscr{V}$ y $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ se cumple que $F(\lambda u + \mu v, w) = \lambda F(u, w) + \mu F(v, w)$.
2. $\forall\ u, v, w \in \mathscr{V}$ y $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ se cumple que $F(u, \lambda v + \mu w) = \lambda F(u, v) + \mu F(u, w)$.

Observación. Si F es una forma bilineal sobre $\mathscr{V}$ entonces $F(\overline{0}, v) = F(u, \overline{0}) = 0$.

Teorema. Sea $\mathrm{B}(\mathscr{V})$ el conjunto de todas las formas bilineales sobre $\mathscr{V}$, es decir,

$$\mathrm{B}(\mathscr{V}) = \{F : \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathbb{K} \,|\, F \text{ es bilineal}\},$$

y sean $+, \cdot$ las operaciones

$$+ : \ \mathrm{B}(\mathscr{V}) \times \mathrm{B}(\mathscr{V}) \ \longrightarrow \ \mathrm{B}(\mathscr{V}), \qquad \cdot : \ \mathbb{K} \times \mathrm{B}(\mathscr{V}) \ \longrightarrow \ \mathrm{B}(\mathscr{V}).$$

a $\mathscr{B}$, respectivamente. Entonces

$$u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n, \;\; v = y_1u_1 + \cdots + y_nu_n.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} F(u,v) &= F(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n, y_1u_1 + \cdots + y_nu_n) \\ &= x_1F(u_1, y_1u_1 + \cdots + y_nu_n) + \cdots + x_nF(u_n, y_1u_1 + \cdots + y_nu_n) \\ &= x_1\sum_{i=1}^{n} y_iF(u_1,u_i) + \cdots + x_n\sum_{i=1}^{n} y_iF(u_n,u_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jF(u_i,u_j). \end{aligned}$$

Matricialmente

$$F(u,v) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} F(u_1,u_1) & \cdots & F(u_1,u_n) \\ \vdots & & \vdots \\ F(u_n,u_1) & \cdots & F(u_n,u_n) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{A esta matriz se le llama} \\ \underline{\textsf{representación matricial de } F} \\ \underline{\textsf{respecto a } \mathscr{B}} \\ \text{y se representa como} \\ \mathscr{M}(F,\mathscr{B})}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Se suele escribir

$$F(u,v) = \mathrm{X} \cdot \mathscr{M}(F,\mathscr{B}) \cdot \mathrm{Y}^T.$$

Arriba se ha visto que

$$F(u,v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jF(u_i,u_j) = F(u_1,u_1)x_1y_1 + \cdots + F(u_n,u_n)x_ny_n.$$

A este polinomio se le llama <u>representación polinomial de F respecto a $\mathscr{B}$</u>.

<u>**Observación.**</u> Si $\mathscr{M}(F,\mathscr{B}) = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ entonces, la representación matricial de F respecto a $\mathscr{B}$ es

$$\begin{aligned} F(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \;=\; & \underbrace{a_{1,1}x_1y_1 + \cdots + a_{n,n}x_ny_n}_{\text{Parte diagonal de la matriz}} \\ & + \underbrace{a_{1,2}x_1y_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_{n-1}y_n}_{\text{Triángulo superior de la matriz}} \\ & + \underbrace{a_{2,1}x_2y_1 + \cdots + a_{n,n-1}x_ny_{n-1}}_{\text{Triángulo inferior de la matriz}} \end{aligned}$$

Si se fija una base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{V}$, se puede considerar la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathrm{B}(\mathscr{V}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \quad (n=\dim(\mathscr{V})) \\ & F & \longmapsto & \mathscr{M}(F,\mathscr{B}) \end{array}$$

Se demuestra que φ es un isomorfismo. Como consecuencia de ello, se cumplen los siguientes resultados.

Teorema. Sea $\mathscr{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n. $\mathrm{B}(\mathscr{V})$ es isomorfo a $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Teorema. Sea $\mathscr{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n. $\dim(\mathrm{B}(\mathscr{V}))=n^2$.

2. Formas bilineales simétricas

Definición. Sea $F\in\mathrm{B}(\mathscr{V})$. Se dice que F es una forma bilineal simétrica si $\forall\, u,v\in\mathscr{V}$ se verifica que $F(u,v)=F(v,u)$.

Observación. De forma similar se introduce el concepto de forma bilineal antisimétrica: $\forall\, u,v\in\mathscr{V}$ se verifica que $F(u,v)=-F(v,u)$.

Teorema. El conjunto $\mathrm{B}_s(\mathscr{V})$, de todas las formas bilineales simétricas sobre $\mathscr{V}$, es un subespacio vectorial de $\mathrm{B}(\mathscr{V})$. Es más, si $\mathscr{V}$ es finito dimensional, entonces $\mathrm{B}_s(\mathscr{V})$ es isomorfo a $\{A\in\mathscr{M}_{\dim(\mathscr{V})\times\dim(\mathscr{V})}(\mathbb{K})\mid A^T=A\}$.

Observación. Similarmente, se demuestra que:

1. el conjunto $\mathrm{B}_a(\mathscr{V})$, de las formas bilineales antisimétricas sobre $\mathscr{V}$, es un subespacio vectorial de $\mathrm{B}(\mathscr{V})$. Si $\mathscr{V}$ es finito dimensional, $\mathrm{B}_s(\mathscr{V})$ es isomorfo a $\{A\in\mathscr{M}_{\dim(\mathscr{V})\times\dim(\mathscr{V})}(\mathbb{K})\mid A^T=-A\}$.

2. Asimismo, se demuestra que
$$\mathrm{B}(\mathscr{V})=\mathrm{B}_s(\mathscr{V})\oplus\mathrm{B}_a(\mathscr{V}).$$
De donde se deduce que, si $\mathscr{V}$ es finito dimensional, el espacio vectorial de las matrices cuadradas sobre $\mathbb{K}$ es suma directa del subespacio vectorial de las matrices simétricas y del subespacio vectorial de las matrices antisimétricas.

Teorema. Sea $\mathscr{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de tipo finito y $F\in\mathrm{B}(\mathscr{V})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. F es simétrica
2. Existe una base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{V}$ tal que $\mathscr{M}(F,\mathscr{B})$ es simétrica.
3. Para toda base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{V}$ se cumple que $\mathscr{M}(F,\mathscr{B})$ es simétrica.

Observación. El teorema análogo para formas bilineales antisimétricas también es cierto.

3. Formas cuadráticas.

Proposición. Sea Q una forma cuadrática sobre $\mathscr{V}$. Se cumple que

1. $Q(\lambda u) = \lambda^2 Q(u)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $u \in \mathscr{V}$.
2. $Q(\overline{0}) = 0$.
3. Si Q está asociada a $F \in \mathrm{B}(\mathscr{V})$ entonces
$$Q(u+v) = Q(u) + Q(v) + F(u,v) + F(v,u).$$

Observación. Asociada a toda forma bilineal existe una única forma cuadrática. Pero una forma cuadrática puede estar asociada a mas de una forma bilineal. Por ejemplo, la forma cuadrática
$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$
está asociada a las formas bilineales
$$F((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2 + kx_1y_2 - kx_2y_1, \text{ con } k \in \mathbb{K}.$$
Sin embargo, una forma cuadrática sólo puede estar asociada a una única forma bilineal simétrica tal y como muestra el siguiente teorema.

Teorema. Sea F una forma cuadrática Q sobre $\mathscr{V}$. Entonces existe una única forma bilineal simétrica F a la que Q está asociada. La forma bilineal simétrica F asociada a Q cumple que
$$F(u,v) = \frac{1}{2}\left(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\right).$$
A F se le llama forma bilineal polar asociada a Q y la representamos como F_{Polar}.

Observación. Similarmente, se introduce el conjunto $\mathrm{Q}(\mathscr{V})$ de todas las formas cuadráticas sobre $\mathscr{V}$ y se demuestra que, con las operaciones usuales, es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial isomorfo a $\mathrm{B}_s(\mathscr{V})$.

Resumen de isomorfismos. Sea $\mathscr{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimension n.

- $\mathrm{B}(\mathscr{V}) \overset{\text{Iso}}{\simeq} \mathscr{M}_{n\times n}(\mathscr{V})$
- $\mathrm{B}_s(\mathscr{V}) \overset{\text{Iso}}{\simeq} \{\text{Matrices simétricas } n\times n \text{ sobre } \mathbb{K}\} \overset{\text{Iso}}{\simeq} \mathrm{Q}(\mathscr{V})$.
- $\mathrm{B}_a(\mathscr{V}) \overset{\text{Iso}}{\simeq} \{\text{Matrices antisimétricas } n\times n \text{ sobre } \mathbb{K}\}$.
- $\mathrm{B}(\mathscr{V}) = \mathrm{B}_s(\mathscr{V}) \oplus \mathrm{B}_a(\mathscr{V})$.
- $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathscr{V}) = \{\text{Matrices simétricas } n\times n \text{ sobre } \mathbb{K}\} \oplus \{\text{Matrices antisimétricas } n\times n \text{ sobre } \mathbb{K}\}$

3.1. Representación matricial y polinomial de una forma cuadrática.

- Se define la representación polinomial de Q como

$$Q(\mathrm{X}) = \mathrm{X} \cdot \mathscr{M}(Q, \mathscr{B}) \cdot \mathrm{X}^T.$$

Observación. [Caso Matricial] Sea Q una forma cuadrática sobre $\mathscr{V}$.

1. Toda representación matricial de Q es simétrica.
2. Todas las representaciones matriciales de Q son congruentes. De hecho, si $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ son bases de $\mathscr{V}$ entonces
$$\mathscr{M}(Q, \mathscr{B}) = \mathscr{M}(\mathscr{B}, \mathscr{B}')^T \mathscr{M}(Q, \mathscr{B}') \, \mathscr{M}(\mathscr{B}, \mathscr{B}').$$
3. Existen bases $\mathscr{B}$ de $\mathscr{V}$ de forma que $\mathscr{M}(Q, \mathscr{B})$ es una matriz diagonal. Para conseguir una de estas bases se puede aplicar, por ejemplo, el método de complección de cuadrados de Gauss (véase pizarra).

Observación. [Caso Polinomial] Sea Q una forma cuadrática sobre $\mathscr{V}$.

1. Sea $A = \mathscr{M}(Q, \mathscr{B}) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Utilizando que A es una matriz simétrica se tiene que
$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \overbrace{\underbrace{(a_{1,1}x_1^2 + \cdots + a_{n,n}x_n^2)}_{\text{Diagonal de la matriz}}}^{\text{Suma de cuadrados perfectos}} + 2\overbrace{\underbrace{(a_{1,2}x_1x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n)}_{\text{Triángulo superior de la matriz}}}^{\text{Suma de productos mixtos}}.$$
2. Teniendo en cuenta que toda forma cuadrática admite representaciones matriciales diagonales (véase observación anterior), se deduce que existen bases de $\mathscr{V}$ de forma que la representación matricial de la forma cuadrática sea una suma de cuadrados. Es decir, Q se puede representar como
$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \underbrace{a_{1,1}x_1^2 + \cdots + a_{n,n}x_n^2}_{\text{Diagonal de la matriz}}.$$

4. Formas cuadráticas reales.

En la sección anterior, como consecuencia del método de complección de cuadrados de Gauss, se vió que toda forma cuadrática sobre un espacio vectorial finito dimensional admite representaciones matriciales diagonales. A continuación, se analiza el comportamiento de dichas representaciones diagonales en el caso real y se expone el teorema de clasificación. Por tanto, en lo que sigue se asume que $\mathscr{V}$ es un espacio vectorial real de dimensión finita ($\dim(\mathscr{V}) = n$) y que

$$Q : \mathscr{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una forma cuadrática.

Teorema. (Ley de inercia de Sylvester)
Todas las representaciones matrices diagonales de Q tienen en su diagonal principal el mismo número de

Teorema. (Representación canónica)
Si Q tiene signatura s y rango r, existe una base $\tilde{\mathscr{B}}$ tal que

1. $$\mathscr{M}(Q,\tilde{\mathscr{B}}) = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}\right\}_s & & \\ & \left.\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}\right\}_{r-s} & \\ & & \left.\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}\right\}_{n-r} \end{pmatrix}$$

2. $Q(x_1,\ldots,x_n) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2$.

La representación en (1) se llama representación matricial canónica de Q y la representación en (2) representación polinomial canónica de Q.

4.1. Clasificación de formas cuadráticas reales.

Definición.

1. Se dice que Q es definida positiva (D.P.) si $\forall\, u \in \mathscr{V} \setminus \{\bar{0}\},\ Q(u) > 0$.
2. Se dice que Q es semidefinida positiva (SD.P.) si $\forall\, u \in \mathscr{V} \setminus \{\bar{0}\},\ Q(u) \geq 0$.
3. Se dice que Q es definida negativa (D.N.) si $\forall\, u \in \mathscr{V} \setminus \{\bar{0}\},\ Q(u) < 0$.
4. Se dice que Q es semidefinida negativa (SD.N.) si $\forall\, u \in \mathscr{V} \setminus \{\bar{0}\},\ Q(u) \leq 0$.
5. Se dice que Q es indefinida (IND.) si $\exists u, v \in \mathscr{V} \setminus \{\bar{0}\}$ tal que $Q(u) > 0$ y $Q(v) < 0$.

Teorema. (Teorema de clasificación.)
Si Q tiene signatura s y rango r, se verifica que

1. Q es D.P. $\Longleftrightarrow s = n$
2. Q es SD.P. $\Longleftrightarrow s = r$ y $r < n$
3. Q es D.N. $\Longleftrightarrow s = 0$ y $r = n$
4. Q es SD.N. $\Longleftrightarrow s = 0$ y $r < n$

4.2. Cálculo de la signatura y el rango

1. Mediante el método de complección de cuadrados de Gauss.
2. Sea A una representación matricial de Q, entonces
   - La signatura es el número de autovalores positivos, contados con multiplicidad, de A
   - El rango es el número de autovalores no nulos, contados con multiplicidad, de A.
3. Sucesión secular. El siguiente método se basa en la regla de los signos de Descartes aplicado a un polinomio (el característico) con todas sus raíces reales. Sea A una representación matricial de Q y

   $$p_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$$

   el polinomio característico de A, entonces
   - La signatura es el número de variaciones de signos en la sucesión $\{1, a_{n-1}, \ldots, a_0\}$, donde sólo se incluyen los coeficientes no nulos del polinomio.
   - El rango es igual a n menos la multiplicidad de la raíz cero en $p_A(t)$.